

Universidade Federal do Espírito Santo
Departamento de Matemática - CCE
P2 – Tarde – Cálculo 1 (MAT15925) – 2025/2

Leia com atenção. Justifique suas respostas.

1. Calcule

1,0

(a) $h'(1)$, sabendo que $h(x) = f(g(x))$ e tendo a tabela:

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

Pela Regra da Cadeia:

$$\begin{aligned}h'(1) &= f'(g(1)) \cdot g'(1) \\&= f'(2) \cdot 6 \\&= 5 \cdot 6 \\&= 30.\end{aligned}$$

1,5

(b) $y'(x)$ sabendo que $x^3 + y^3 = 6xy$

Derivando implicitamente em relação a x :

$$\begin{aligned}3x^2 + 3y^2y' &= 6(y + xy') \\3y^2y' - 6xy' &= 6y - 3x^2 \\y'(y^2 - 2x) &= 2y - x^2 \\y' &= \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}.\end{aligned}$$

1,5

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{4x^3}$

Aplicando a Regra de L'Hôpital sucessivamente às indeterminações $0/0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{12x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{24x} = \frac{1}{24},$$

em que na última igualdade usamos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

1,5

(d) $\frac{d}{dx} \left(\ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \right)$ (Dica: primeiro, use propriedades do logaritmo).

Primeiro, aplicamos as propriedades do logaritmo, em seguida, derivamos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\ln \frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \right) &= \frac{d}{dx} \left(\ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x-2) \right) \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2(x-2)} \\ &= \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)} \end{aligned}$$

1,0

2. Encontre máximo absoluto e o mínimo absoluto de $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3$ no intervalo $[-2, 2]$.

Temos uma função contínua num intervalo limitado e fechado, logo basta comparar os valores de f nos números críticos no interior do intervalo com o valor de f nos extremos do intervalo.

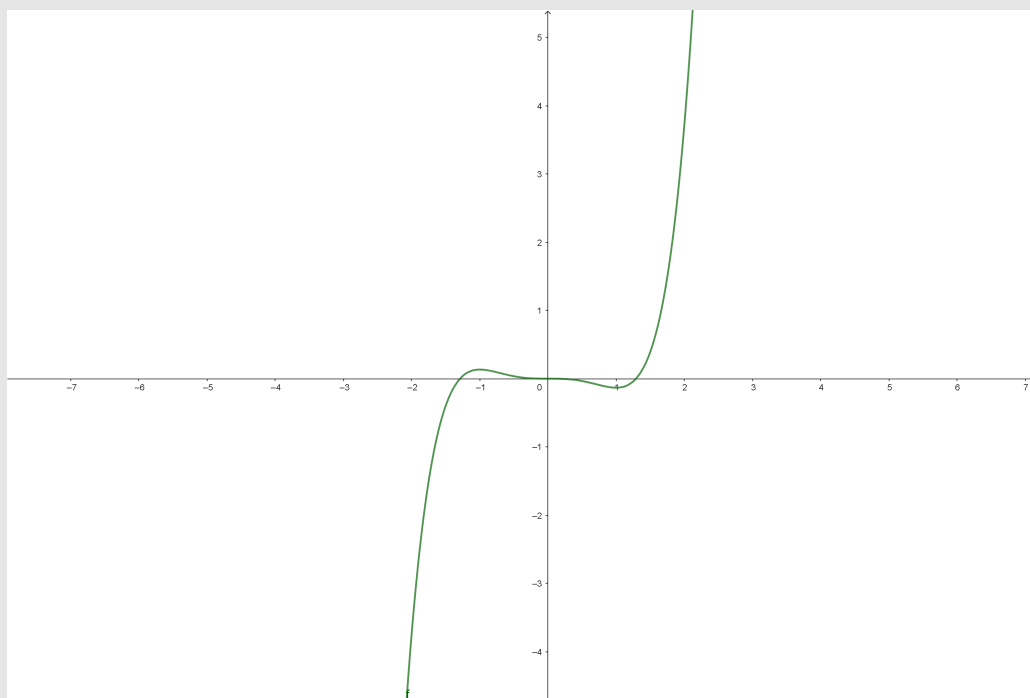
Derivada : $f'(x) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1)$,

Números críticos: $f'(x) = 0 \implies x = 0, x = \pm 1$.

Agora $f(0) = 0$, $f(1) = -\frac{2}{15}$, $f(-1) = \frac{2}{15}$, $f(2) = \frac{56}{15}$, $f(-2) = -\frac{56}{15}$.

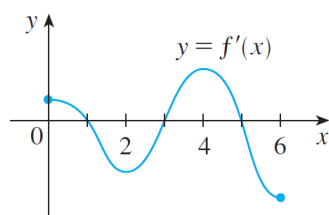
Conclusão: Máximo Absoluto: $\frac{56}{15}$, Mínimo Absoluto: $-\frac{56}{15}$.

Obs.: confirmando no gráfico



2,0

3. O gráfico de uma função **derivada** f' está mostrado.



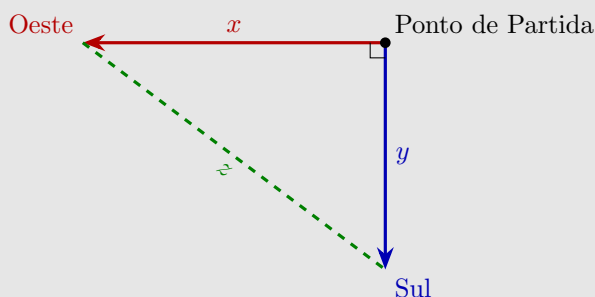
Acerca da função f , justifique:

- (a) um intervalo onde é crescente e os números onde tem máximo local;
- (b) um intervalo de concavidade para cima e os números onde tem pontos de inflexão.

- a) A função f cresce nos intervalos onde a derivada f' é positiva, observando o gráfico de f' , concluímos que é no intervalo $(0, 1)$ ou no intervalo $(3, 5)$; o máximo local ocorre onde f' muda de sinal positivo para negativo, ou seja, em $x = 1$ ou em $x = 5$.
- b) A função f tem concavidade para cima nos intervalos onde a segunda derivada f'' é positiva, o que equivale a f' ser crescente e, do gráfico de f' dado, vemos que é no intervalo $(2, 4)$; os pontos de inflexão de f são os pontos onde muda a concavidade de f , ou seja, onde f' muda de crescente para decrescente ou onde f' muda de decrescente para crescente; isso ocorre em $x = 2$ ou em $x = 4$.

1,5

4. Dois carros iniciam o movimento partindo de um mesmo ponto. Um viaja para Sul a 30 km/h e o outro viaja para Oeste a 40 km/h. A que taxa a distância entre os carros está aumentando duas horas depois?



(0,5)

Sejam x, y as distâncias para Oeste, Sul, respectivamente e seja z a distância entre os carros (distâncias em km) em função do tempo t (em horas).

Queremos $\frac{dz}{dt}$ para $t = 2$. Temos a relação $z^2 = x^2 + y^2$ (Teorema de Pitágoras), donde derivando com respeito a t :

$$2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

$$z \frac{dz}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}$$

(0,5)

Temos $\frac{dx}{dt} = 40$ e $\frac{dy}{dt} = 30$, implicando, que para $t = 2$ horas temos $x = 40 \times 2 = 80$, $y = 30 \times 2 = 60$ e $z = \sqrt{80^2 + 60^2} = \sqrt{6400 + 3600} = \sqrt{10000} = 100$.

(0,5)

Substituindo :

$$100 \cdot \frac{dz}{dt} = 80(40) + 60(30)$$

$$100 \cdot \frac{dz}{dt} = 3200 + 1800$$

$$100 \cdot \frac{dz}{dt} = 5000$$

$$\frac{dz}{dt} = 50 \text{ (km/h)}.$$

Solução alternativa:

(0,5)

Calcular apenas a distância entre os carros passado duas horas e chegar em 100 km permite calcular uma **taxa/velocidade média** de $\frac{100-0}{2-0} = 50\text{km/h}$.

(1,0)

Porém, o que é solicitado é uma taxa instantânea dz/dt no instante $t = 2$. Como $x = 40t$, $y = 30t$, temos $z = \sqrt{(40t)^2 + (30t)^2} = 50t$ km, ou seja, os carros afastam-se a uma velocidade constante de 50km/h. Portanto, velocidade instantânea é, em cada instante, constante igual à velocidade média que é, então, 50km/h.