Seminário PPGMAT
Data e hora: 16/07/2021, 15:30 (abertura da sala com 5 minutos de antecedência)
Acesso:`meet.google.com/rde-mprc-mmg`.

Wescley Bonomo
UFES/PPGMAT

Estabilidade de conjuntos de rotação em $Homeo_{0,\lambda}(\mathbb{T}^d)$

Resumo:

Esta apresentação é resultante dos Trabalhos

1. W. Bonomo; H. Lima; P. Varandas. The rotation sets of most homeomorphisms on $\mathbb{T}^d$ are stable, convex and rational polyhedrons. Israel Journal of Mathematics, 2021.

2. Wescley Bonomo, Heides Lima, Paulo Varandas. Shape and stability of rotation sets for incompreensible flows on the torus. Preprint, 2020.

Um dos invariantes topológicos mais importantes para homeomorfismos unidimensionais é o número de rotação, introduzido por Poincaré: Dado um homeomorfismo que preserva orientação $f \in Homeo_+(\mathbb{S}^1)$, seu número de rotação é definido por $\rho(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{F^n(\tilde{x})-\tilde{x}}{n}$ (mod1), onde $x \in \mathbb{S}^1$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um levantamento de f e $\tilde{x} \in \pi^{-1}(x)$. Ademais,

i. o número de rotação $\rho(f)$ é independente de F e x e de fato é invariante por conjugações topológicas;

ii. $\rho(f)$ é racional se e somente se f admite pontos periódicos, e neste caso, todos têm o mesmo período;

iii. Se $\rho(f)$ é irracional, então $\omega(x)$ é um subconjunto de $\mathbb{S}^1$ que é f-minimal e independente de x, e

iv. Se $\rho(f)$ é irracional e f é transitiva, então f é topologicamente conjugada a rotação irracional $R_{\rho(f)}$.

Em [1] é provado que homeomorfismos conservativos e isotópicos a identidade, nos toros $\mathbb{T}^d$, $(d \geq 3)$, existe um C^0-aberto e denso de homeomorfismos com conjunto de rotação estável, para todo $d \geq 3$, o qual é um poliedro com vértices racionais e interior não-vazio. Neste caso, descrevemos condições necessárias para um tal homeomorfismo não ser tempo-1 de um fluxo contínuo em $\mathbb{T}^d$.

Um resultado célebre de M. Peixoto estabelece que existe subconjunto C^0-aberto e denso $\mathcal{A} \subset Homeo_+(\mathbb{S}^1)$, cujos elementos são estruturalmente estáveis. Como consequência, todo elemento $f \in \mathcal{A}$ é tal que seu número de rotação $\rho(f)$ é racional e estável, isto é, ele não é alterado por C^0-perturbações suficientemente pequenas (vide [7] para uma descrição mais detalhada sobre a Teoria envolvendo o conceito de número de rotação).

Desde o início dos anos 90, tem havido várias contribuições, na tentativa de estender esta teoria da rotação às dimensões superiores e, mais eficazmente, em

$\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ = conjunto dos homeomorfismos homotópicos a identidade no 2-toro $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Neste caso, Misiurewicz & Ziemian [8] introduziram o seguinte conceito de conjunto de rotação, em $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^d)$: dado $f \in \mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^d)$ e $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ um levantamento de f, $\rho(F)$ é o conjunto de vetores em $\mathbb{R}^d$ que são pontos de acumulação de sequências $(\frac{F^{n_i}(\tilde{x}_i)-\tilde{x}_i}{n_i})_{i\geq 1}$, $\tilde{x}_i \in \mathbb{R}^d$ e $n_i \geq 1$.

No caso do toro $\mathbb{T}^2$, é sabido que conjuntos de rotação são subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ compactos e convexos, e que qualquer polígono convexo com vértices racionais é realizado como um conjunto de rotação (cf. [8, 4]). Outras contribuições acerca de conjuntos de rotação envolvendo homeomorfismos em $\mathbb{T}^2$ foram apresentadas por Llibre & Mackay [5] e Franks [2]: homeomorfismos em $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ tendo conjuntos de rotação com interior não vazio têm entropia topológica positiva e, todos os pontos extremos com coordenadas racionais podem ser realizados por pontos periódicos. Mais recentemente, estes últimos resultados foram cruciais para provar que existe um conjunto C^0-aberto e denso em $\mathrm{Homeo}_0(\mathbb{T}^2)$ cujos conjuntos de rotação são polígonos com vértices tendo coordenadas racionais e que são estáveis por C^0-perturbações da dinâmica (cf. [1, 3, 9]). Estes resultados constituem uma contrapartida para a estabilidade de conjuntos de rotação para homeomorfismos no círculo.

A teoria da rotação de homeomorfismos de toros de maior dimensão $\mathbb{T}^d$ ($d > 2$) teve muito poucas contribuições, o que aparentemente parece estar relacionado com o fato de que muitos dos argumentos usados na obtenção dos resultados citados no parágrafo precedente não se generalizam para dimensões mais altas, como também há exemplos que apresentam maior complexidade. Por exemplo, a convexidade dos conjuntos de rotação não pode ser assegurada para todos os homeomorfismos, pois há homeomorfismos em $\mathbb{T}^d$ ($d > 2$) com conjuntos de rotação não convexos [8].

Neste sentido, [1] surge como continuação de um trabalho anterior do segundo e terceiro autores ([6]). Nele, como versão para dimensões mais altas do resultado de M. Peixoto acima citado, provamos que C^0-aberto e denso, os conjuntos de rotação de homeomorfismos conservativos e homotópicos a identidade no toro $\mathbb{T}^d$, $d \geq 3$ são poliedros convexos cujos vértices são vetores que possuem apenas coordenadas racionais.

Por outro lado, em [2] introduzimos o conceito de cone de rotação para fluxos conservativos em $\mathbb{T}^d$, $d \geq 3$, e provamos que aberto e densamente, o cone de rotação é estável e poliedral, sendo que suas arestas são geradas por um vetor com coordenadas racionais.

References

[1] S. Addas-Zanata, Instability for the rotation set of homeomorphisms of the torus homotopic to the identity, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* 24 (2004) 319–328.

[2] J. Franks, Recurrence and fixed points of surface homeomorphisms. Ergodic Theory Dynam. Systems 8 (1988), Charles Conley Memorial Issue, 99-107.

[3] P.-A. Guiheneuf, A. Koropecki, Stability of the rotation set of area-preserving toral homeomorphisms, *Nonlinearity* 30 (2017) 1089–1096.

[4] J. Kwapisz, Every convex polygon with rational vertices is a rotation set. *Ergod. Th. Dyn. Syst.* 12 (1992) 333–339.

[5] J. Llibre, R. MacKay, Rotation vectors and entropy for homeomorphisms of the torus homotopic to the identity. *Ergod. Th. Dyn. Syst.* 11 (1991), no. 1, 115-128.

[6] H. Lima and P. Varandas, On the rotation sets of generic homeomorphisms on the torus $\mathbb{T}^d$, Preprint ArXiv:1901.00396

[7] M. Misiurewicz, *Rotation Theory*, Online Proceedings of the RIMS Workshop "Dynamical Systems and Applications: Recent Progress" (2006).

[8] M. Misiurewicz, K. Ziemian, Rotation sets and ergodic measures for torus homeomorphisms. *Fund. Math.* 137 (1991), no. 1, 45-52.

[9] A. Passeggi, Rational polygons as rotation sets of generic homeomorphisms of the two torus. *J. Lond. Math. Soc.* (2) 89 (2014), no. 1, 235-254.